



# MECHANIKA I FIZYKA CIAŁA STAŁEGO

# PLAN PREZENTACJI

**W**prowadzenie

**K**lasyfikacja sił w ustrojach sprężynowych

**S**tany obciążenia

**N**apężenie

**O**dkształcenie

**E**nergia potencjalna ustrojów sprężynowych

**P**odstawy metody elementów skończonych

**P**odział modeli ze względu na modelowanie

**P**odział modeli ze względu na wyjście – wejście

**M**odelowanie a symulacja

**M**odelowanie obiektów rzeczywistych

**P**rzykłady modelowania

**C**ałkowanie numeryczne

**M**etlab i simulink

**M**CS Adams

**J**ak przedstawić wyniki badań

**A**nimacja podwójnego wahadła



# WPROWADZENIE



**USTROJEM SPRĘŻYSTYM** nazywa się układ mechaniczny, którego elementy są odkształcalne, przy czym odkształcenia są odwracalne i są wprost proporcjonalne do obciążeń.

**UKŁAD CLAPEYRONA** jest to ustrój sprężysty, którego przemieszczenie w dowolnym punkcie jest kombinacją liniową działających nań obciążeń:

$$u = \sum_{1}^{n} a_i Q_i = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \dots + a_n Q_n$$

gdzie  $u$  oznacza przemieszczenie uogólnione, a  $P$  – siłę uogólnioną;  $a$  to współczynniki wpływu poszczególnych obciążeń.



# WPROWADZENIE

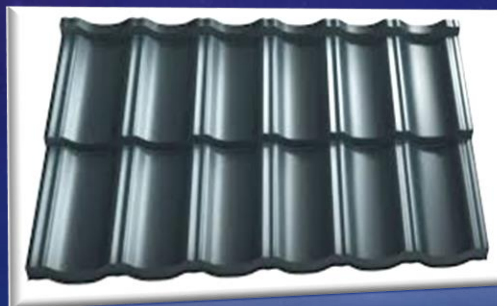


## KLASYFIKACJA USTROJÓW SPRĘŻYSTYCH

**Pręty**



**Ustroje powierzchniowe**



**Bryły**



# WPROWADZENIE



## KLASYFIKACJA USTROJÓW SPRĘŻYSTYCH

Pręty - części o jednym wymiarze (długość) znacznie większym od dwóch pozostałych i osi prostej lub krzywoliniowej

słup

wieszak

łuk

sprężyna

ciągno

belka



# WPROWADZENIE



## KLASYFIKACJA USTROJÓW SPRĘŻYSTYCH

Ustroje powierzchniowe – ustroje o jednym wymiarze (grubość) znacznie mniejszym od dwóch pozostałych i powierzchni środkowej płaskiej lub zakrzywionej

tarcza



płyta



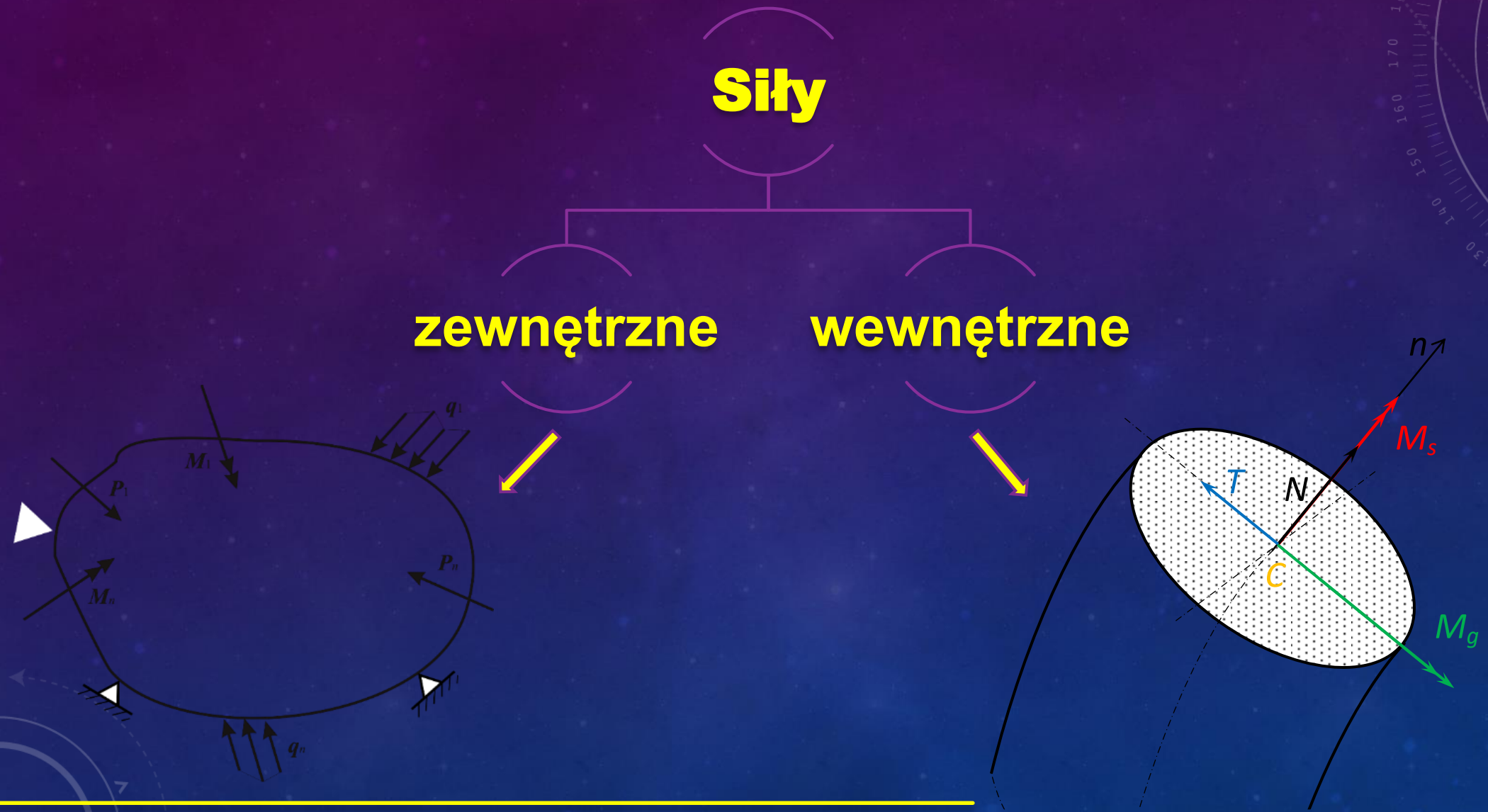
powłoka





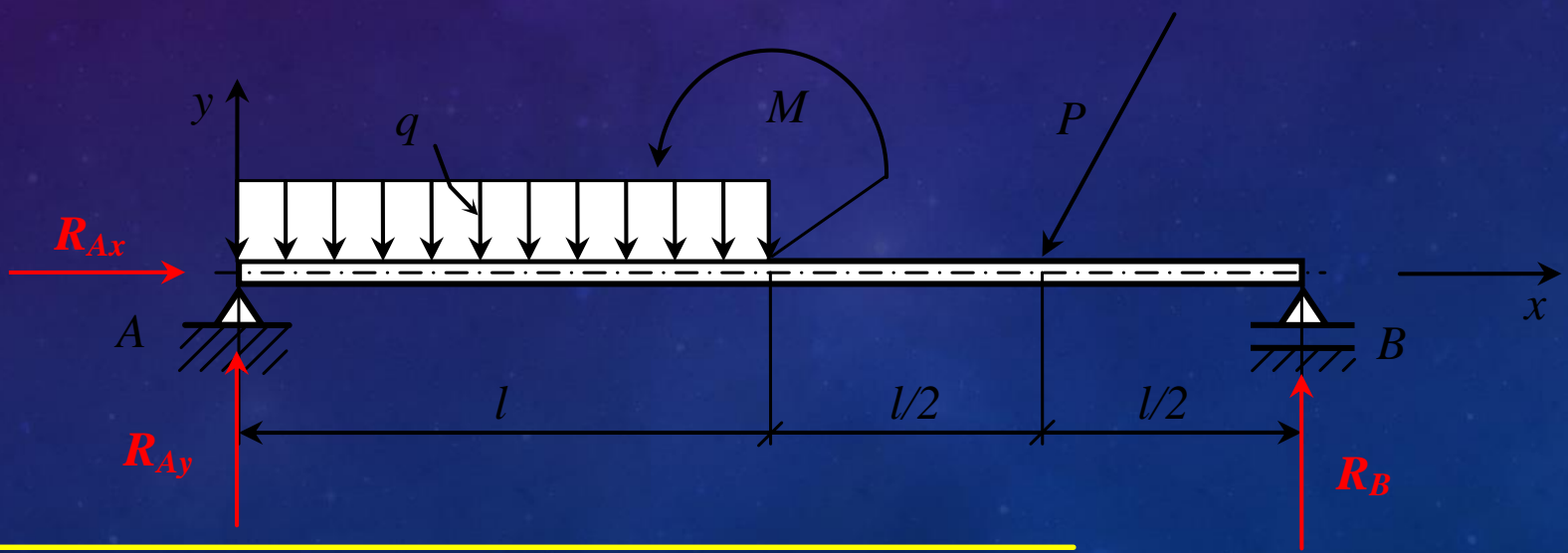


# KLASYFIKACJA SIŁ W USTROJACH SPRĘŻYSTYCH





# KLASYFIKACJA SIŁ W USTROJACH SPRĘŻYSTYCH

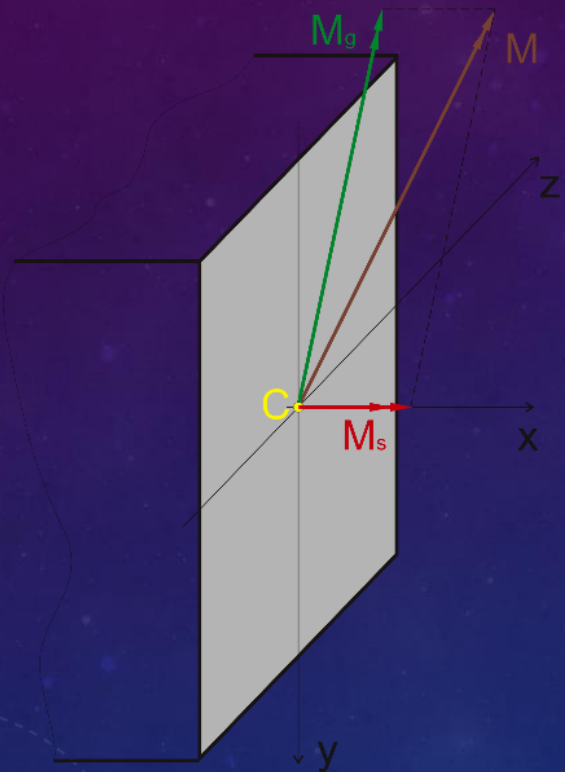






# KLASYFIKACJA SIŁ W USTROJACH SPRĘŻYSTYCH

## Siły wewnętrzne



momenty

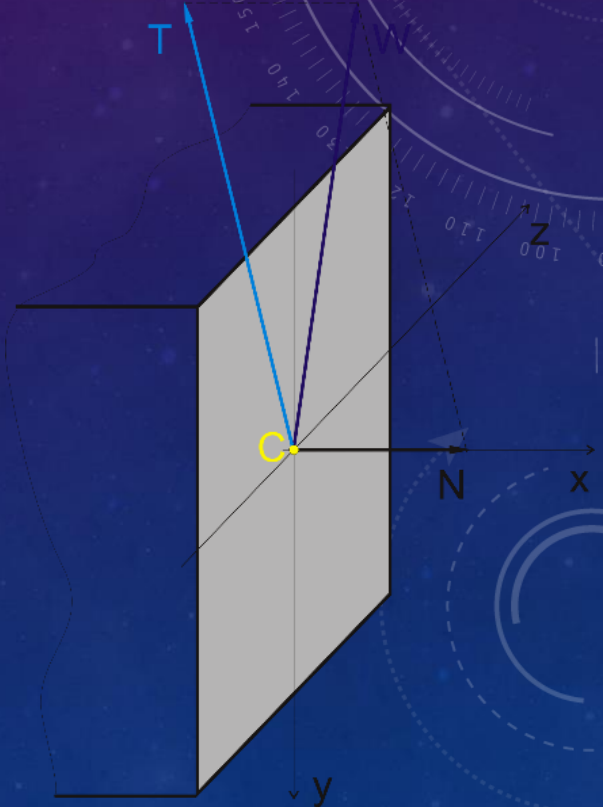
skupione

gnące

poprzeczne (tnące)

skręcające

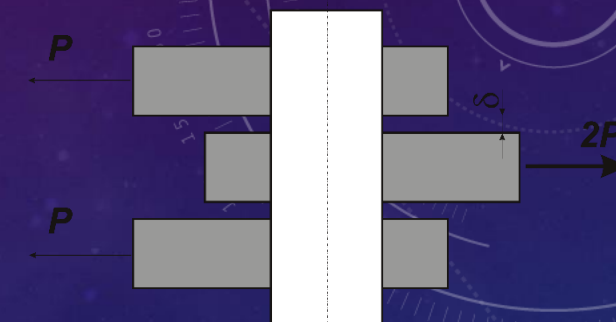
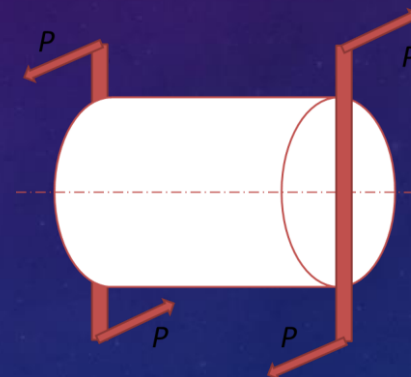
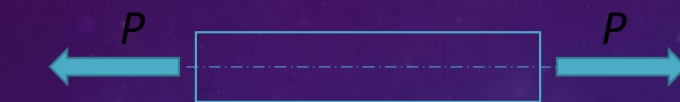
normalne



# STANY OBCIĄŻENIA

□ proste – gdy działa obciążenie jednego rodzaju:

- rozciąganie/ściskanie,
- ścinanie,
- zginanie,
- skręcanie,



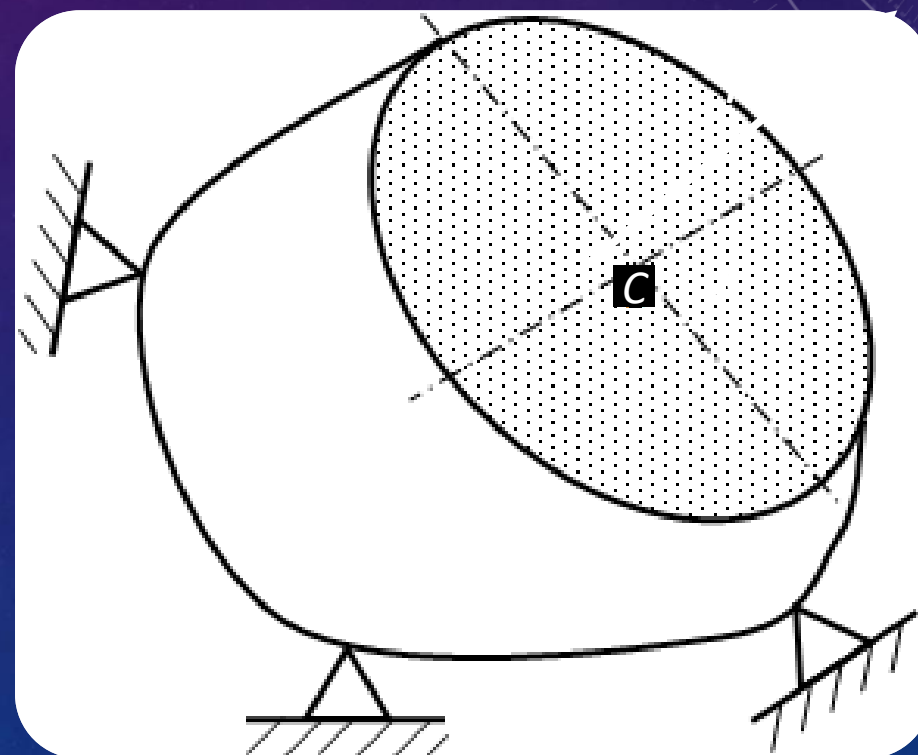
□ złożone – gdy urządzenie znajduje się pod działaniem wielu prostych obciążeń jednocześnie

# NAPRĘŻENIE

**Naprężeniem (średnim)  $s$**  w danym przekroju ustroju sprężystego nazywa się iloraz siły normalnej  $N$  do pola powierzchni  $A$  tego przekroju:

$$\sigma_{sr} = \frac{N}{A}$$

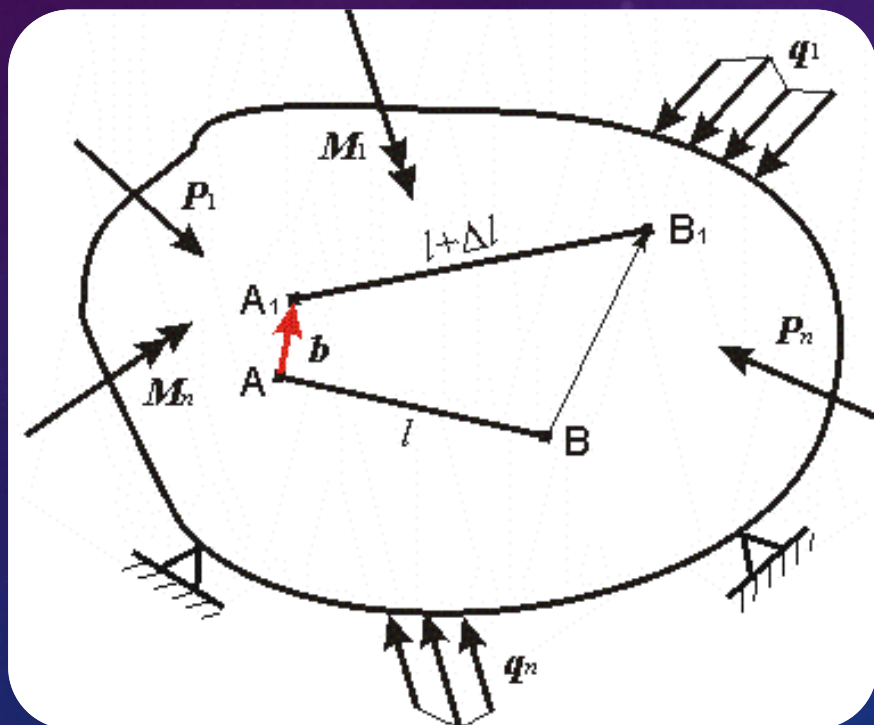
$$\left[ \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad \text{MPa} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad 10\text{MPa} = \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right]$$





# ODKSZTAŁCENIE

**Odkształceniem liniowym (średnim)  $\varepsilon$**  w danym przekroju ustroju sprężystego nazywa się iloraz przyrostu długości  $\Delta l$  odcinka AB do jego długości pierwotnej  $l$



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



# ENERGIA POTENCJALNA USTROJÓW SPRĘŻYSTYCH

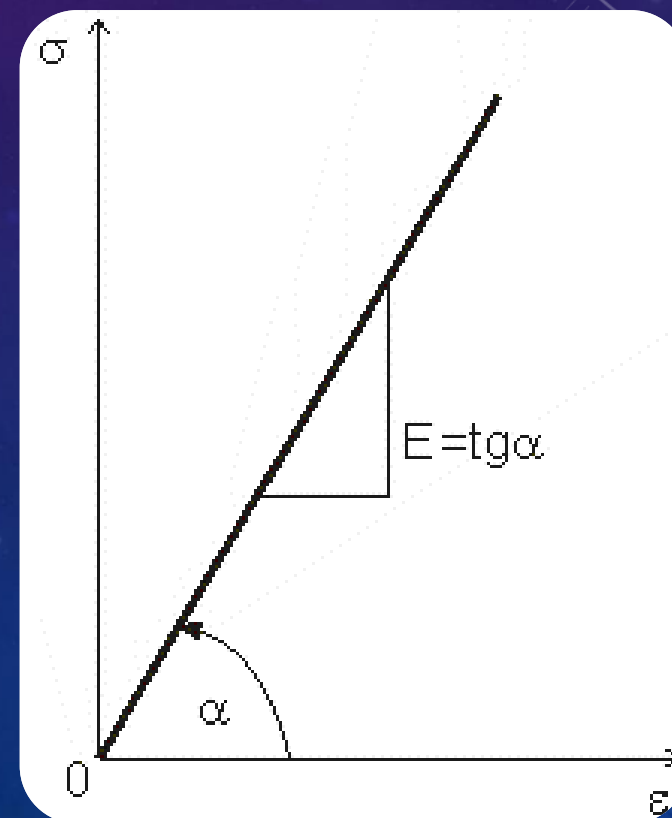
**Rozciąganie (ściskanie)** pręta na sposób quasi-statyczny,  
z pominięciem ciężaru własnego

$$\sigma = \varepsilon E$$

Jednoosiowe Prawo Hooke'a (liniowa sprężystość)

dla rozpatrywanego przypadku można zapisać w postaci:

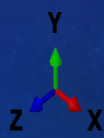
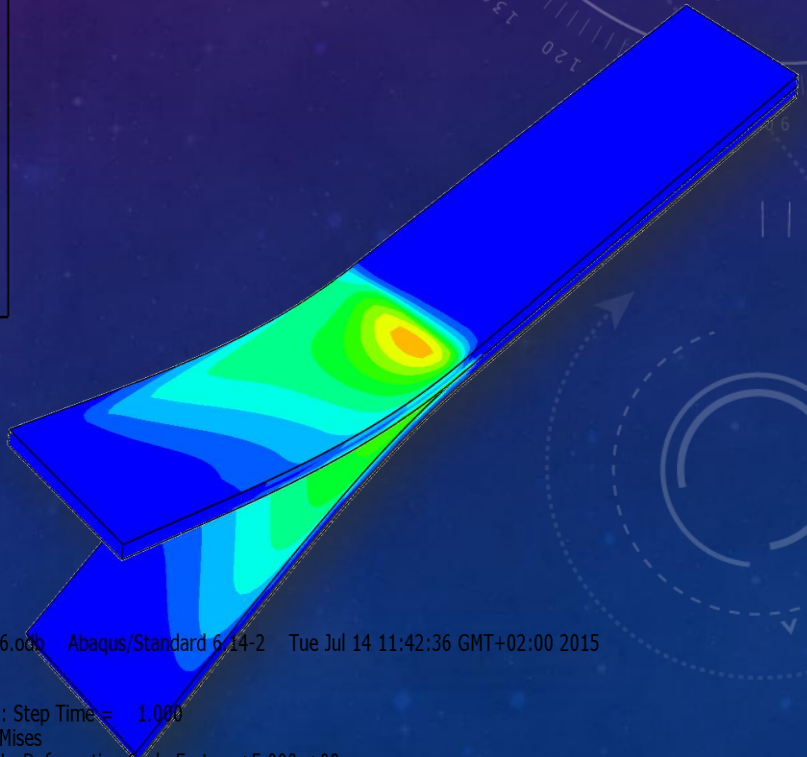
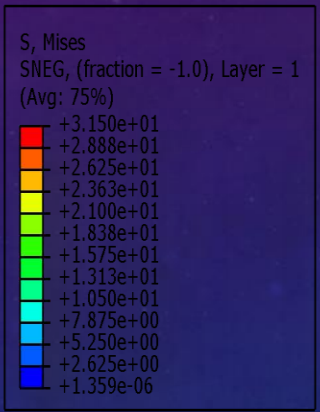
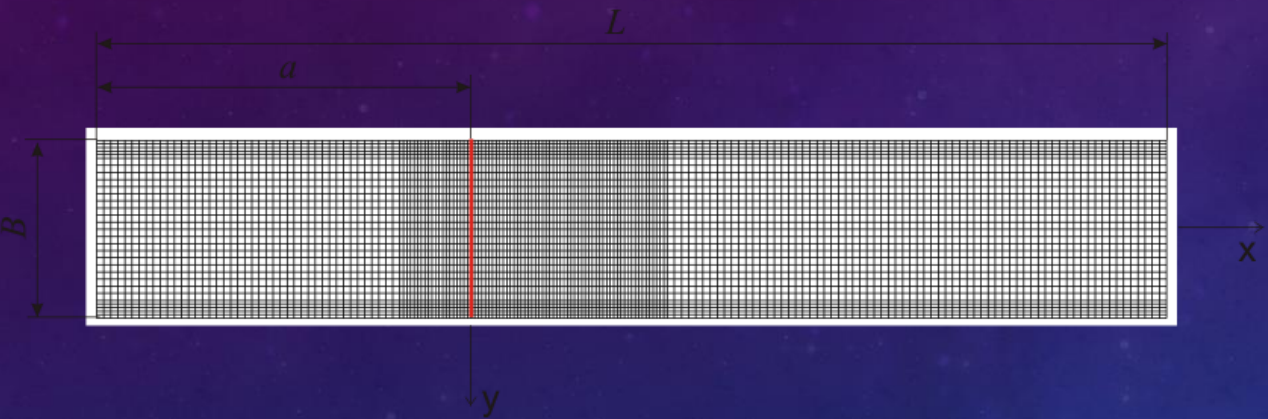
$$\lambda_q = \frac{P_q l}{EA}$$





# PODSTAWY METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Metoda opiera się na zastąpieniu ustroju ciągłego elementami o skończonych wymiarach, połączonych w węzłach. W ten sposób otrzymuje się tzw. siatkę (z j. ang. *mesh*), przypominającą kratownicę.



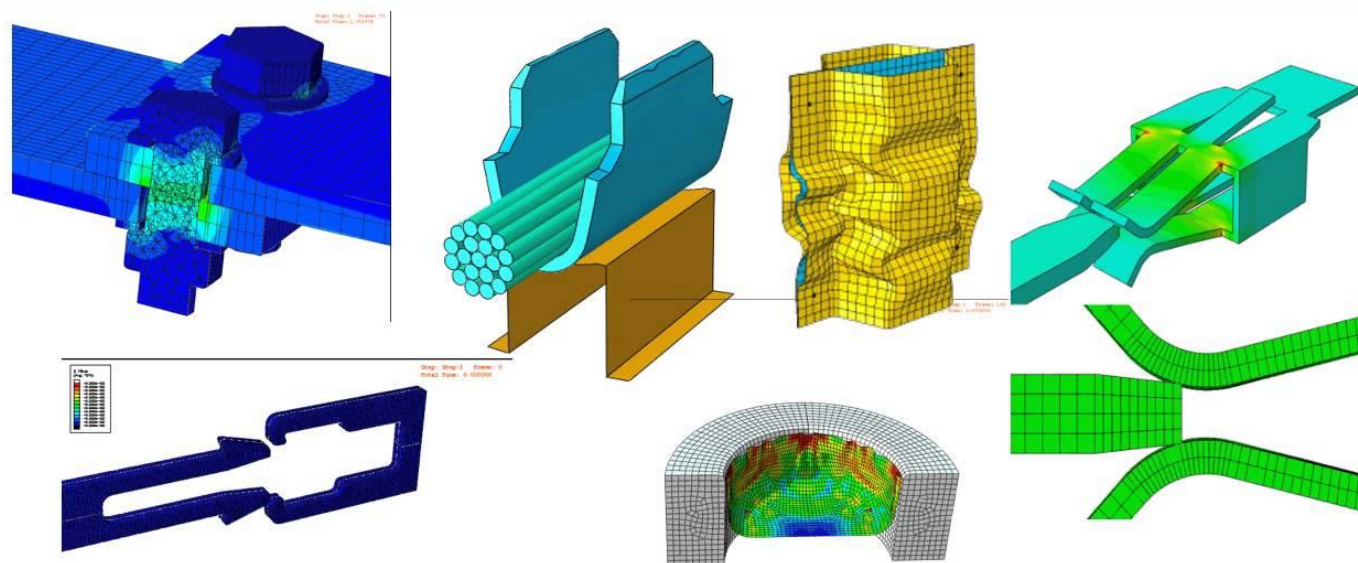
ODB: Job-Ch4-16.odb Abaqus/Standard 6.14-2 Tue Jul 14 11:42:36 GMT+02:00 2015  
Step: Step-1  
Increment 23: Step Time = 1.000  
Primary Var: S, Mises  
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +5.000e+00



# PODSTAWY METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

## Abaqus contact

SSA



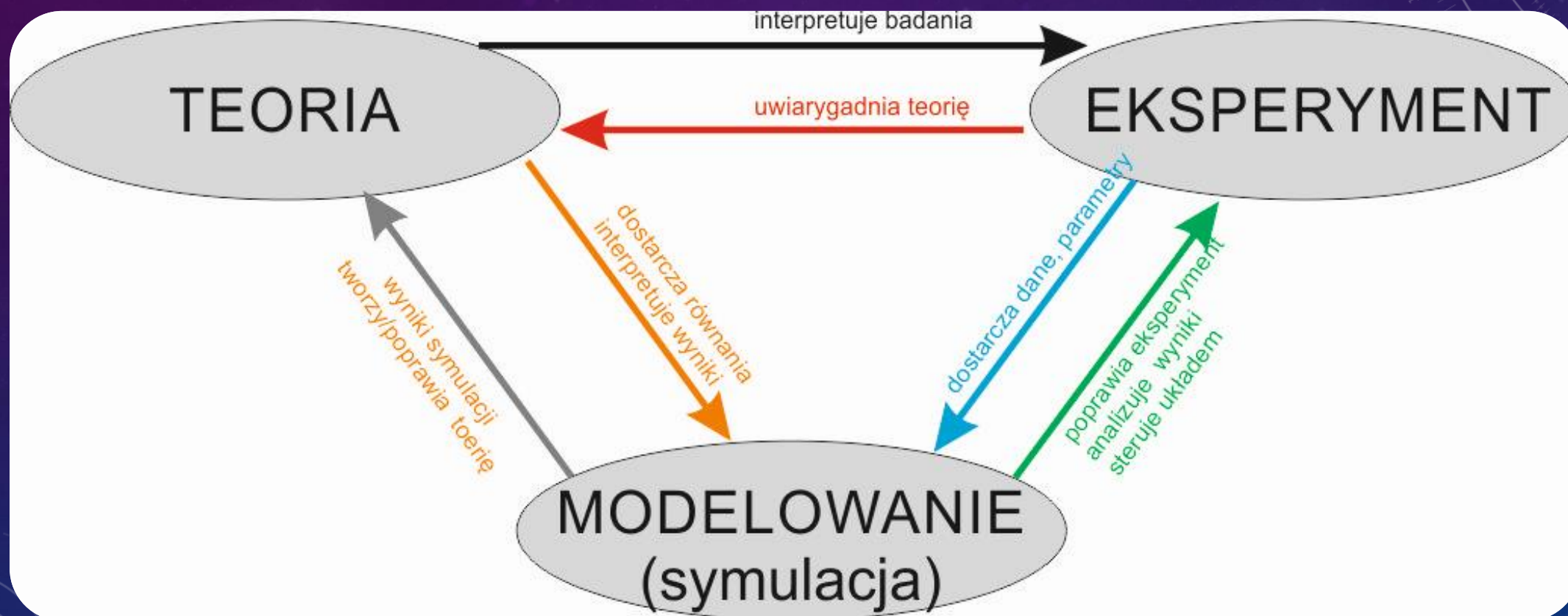
DS

DS SIMULIA

Za pomocą współczesnych kodów MES można rozwiązywać zarówno zagadnienia statyczne, jak i dynamiczne mechaniki, z uwzględnieniem zmian temperatury, pola elektrycznego, magnetycznego, przepływów cieczy i gazów itd.

# SKĄD BRAĆ WIEDZĘ ???

Ludzkie badania działają, na dwóch głównych płaszczyznach: dążą do przewidywania przyszłości i pozwalają podejmować coraz lepsze reakcje na bieżące zdarzenia.







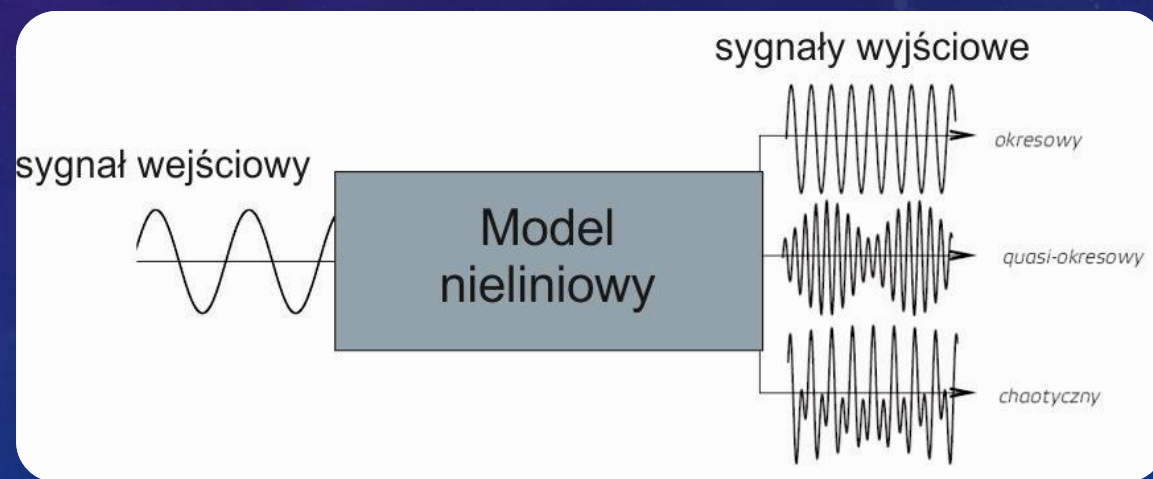
# PODZIAŁ MODELI ZE WZGLĘDU NA RODZAJ MODELOWANIA

- **model fizyczny** - abstrakcyjny układ odzwierciedlający w uproszczeniu układ rzeczywisty. Jednocześnie model fizyczny zachowuje najbardziej istotne cechy układu rzeczywistego,
- **model matematyczny** - zbiór reguł i zależności, na podstawie których można za pomocą obliczeń przewidzieć przebieg modelowanego procesu. Modelem matematycznym są równania opisujące proces (algebraicznych, różniczkowych, całkowych itp.),
- **model numeryczny** - program komputerowy umożliwiający wprowadzanie parametrów modelowanego układu i stanu początkowego, otrzymanie na drodze obliczeniowej przebiegów czasowych zjawisk i charakterystyk modelowanego układu.



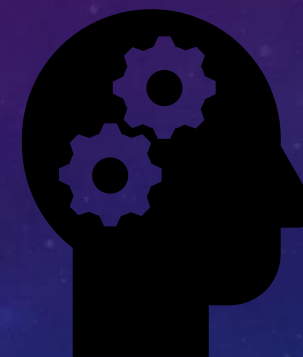
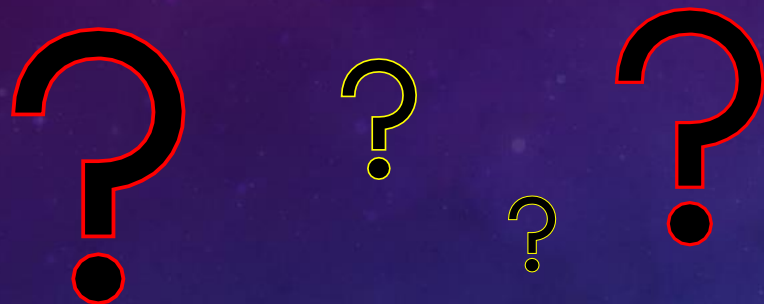
# PODZIAŁ MODELI ZE WZGLĘDU NA WEJŚCIE - WYJŚCIE

- **liniowy** - zmienne wyjściowe są związane ze zmiennymi wejściowymi przy użyciu liniowych funkcji,
- **nieliniowy** - wykorzystuje funkcje nieliniowe do obliczania wartości parametrów wyjściowych.



# MODELOWANIE A SYMULACJA

Metodyka modelowania polega na znajdowaniu dla nich opisów formalnych w postaci matematycznych modeli. Jak z tego wynika, przy modelowaniu dominuje pierwiastek intelektualny (trzeba coś wymyślić, poprawić...).



Symulacja polega na wykorzystaniu komputera do obliczania wartości występujących w modelach.





## Zalety badań numerycznych

- ❑ **Elastyczność i modyfikacja.** Rozumiana jako łatwość wprowadzania zmian w modelu symulowanego procesu.
- ❑ **Łatwość pobudzania.** Wprowadzania różnego rodzaju wymuszeń i zakłóceń, w szczególności losowych i ekstremalnych.
- ❑ **Niewielki koszt i czas przygotowania symulacji.**

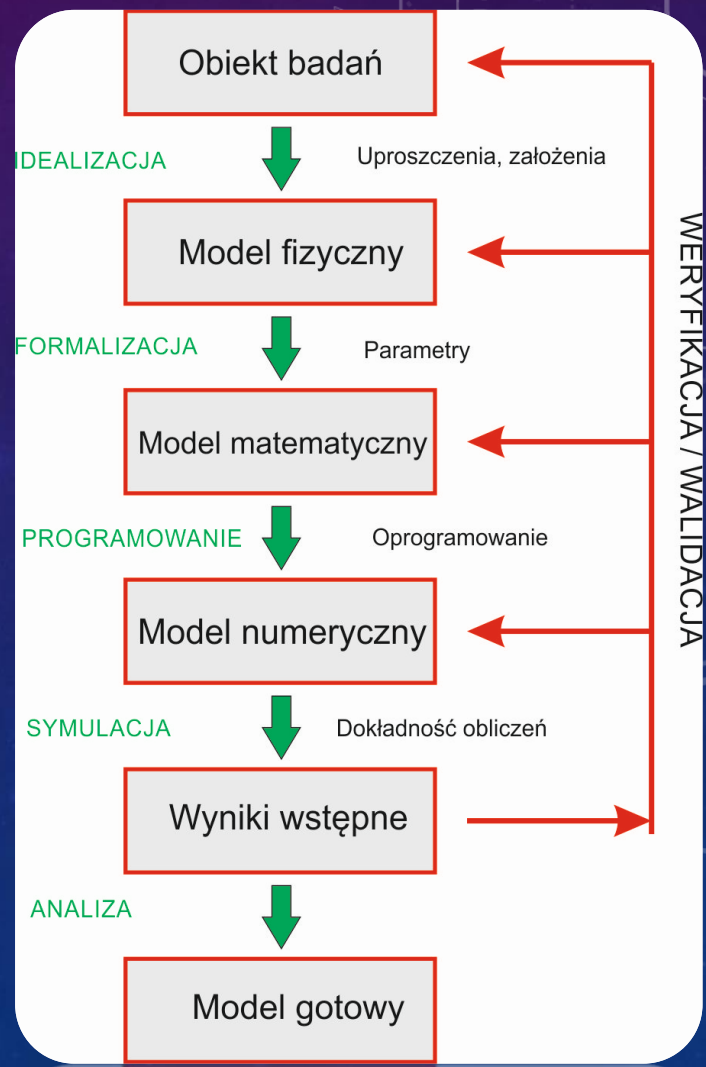
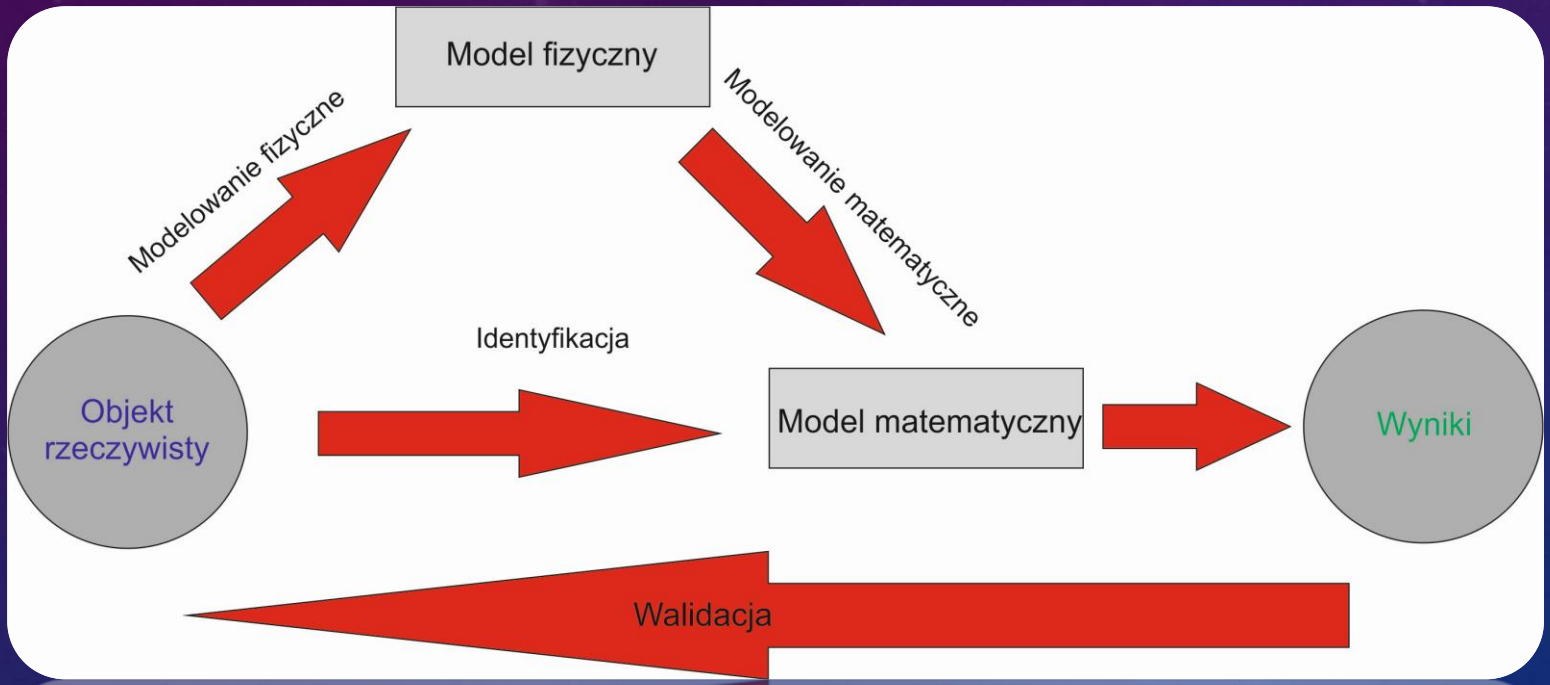
## Wady badań numerycznych

- ❑ Wyniki mają zawsze charakter przybliżony, a ich jakość i przydatność, zależy zarówno od przyjętego modelu.
- ❑ Posiadanie umiejętności i doświadczenia,
- ❑ Czas symulacji (czasami bardzo długi),
- ❑ Koszt oprogramowania.

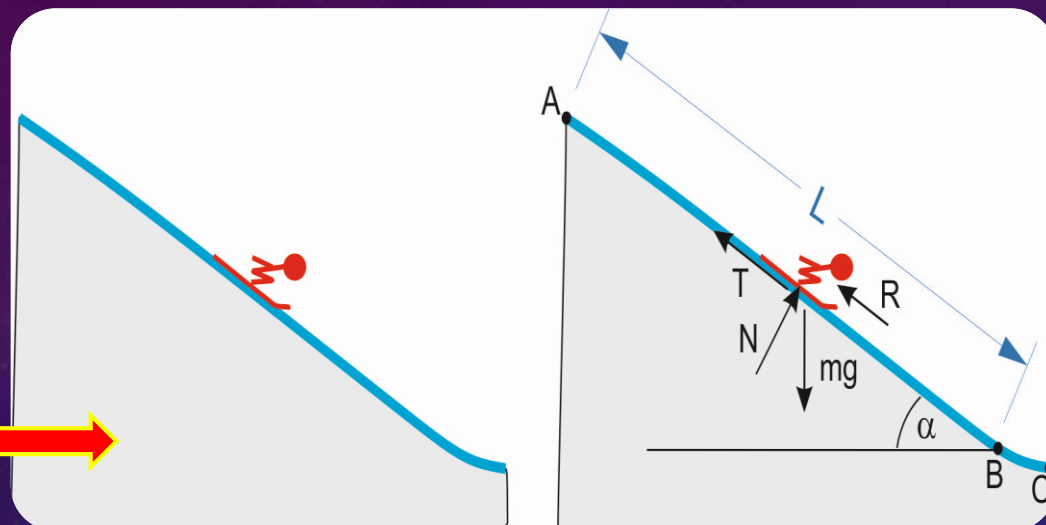




# MODELOWANIE OBIEKTÓW RZECZYWISTYCH



# PRZYKŁADY MODELOWANIA



**Model fizyczny:** Rozpatrujemy ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej.

## Parametry

$m$  – masa skoczka,  
 $g$  – przyspieszenie ziemskie,  
 $N$  – siła normalna,  
 $T$  – tarcie nart o tory,  
 $R$  – siła oporu powietrza.

## Model matematyczny:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - T - R$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{c_s \rho}{2m} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

## Cel

- Wpływu smarowania i sylwetki na prędkość na progu.

## Założenia

- Masa skoczka jest ustalona. Tory są idealnie zmrożone i jednorodne na całej długości rozbiegu.

## Uproszczenia:

- Pomijamy odcinek progu (mała strata prędkości).
- Rozbieg traktujemy jako prostoliniowy.
- Współczynnik tarcia nie zależy od prędkości.
- Pomijamy wpływ prędkości wiatru na rozbiegu.



# CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

Podział odcinka  $[a, b]$  na podprzedziały.

$$\text{Podział } P = \{a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b\}$$

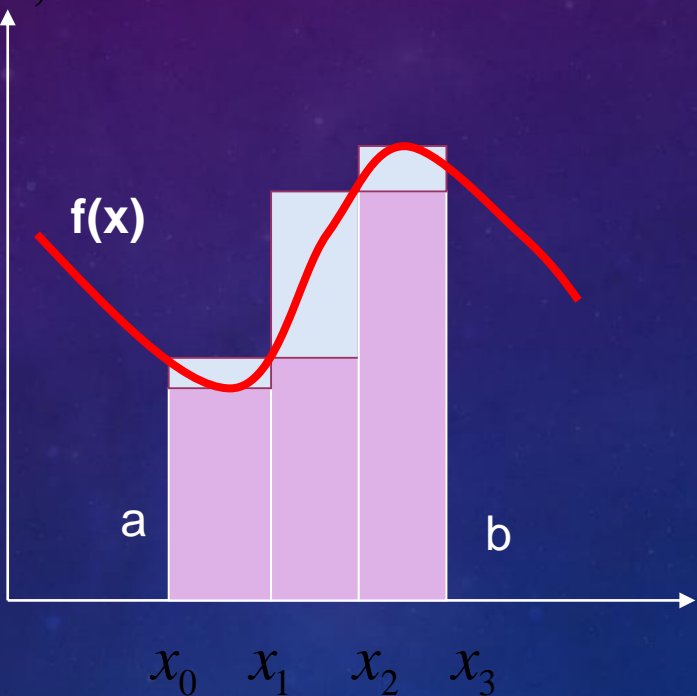
Definiujemy

$$m_i = \min \{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$

$$M_i = \max \{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$

$$\text{Dolna suma } L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

$$\text{Górna suma } U(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$



Podział odcinka  $[a, b]$  na podprzedziały.

$$\text{Dolna suma } L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

$$\text{Górna suma } U(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$

$$\text{Oszacowanie całkowania} = \frac{L+U}{2}$$

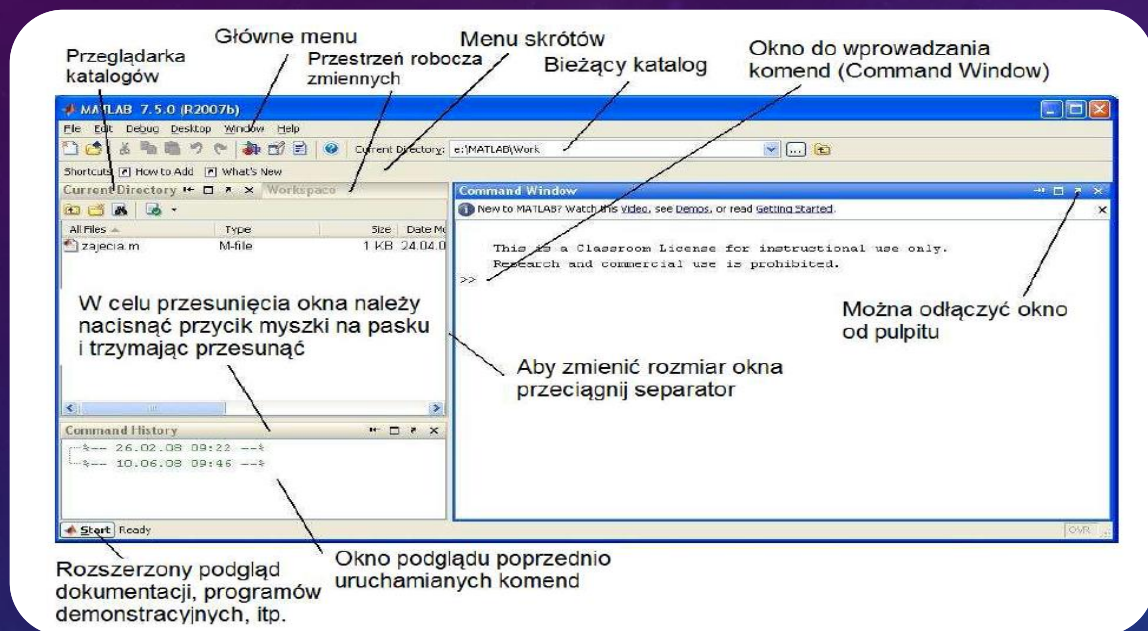
$$\text{Bład} \leq \frac{U-L}{2}$$





# MATLAB I SIMULINK

**Matlab** umożliwia wykorzystanie metod rachunku macierzowego za pomocą interaktywnego interfejsu i prostego języka poleceń. Wszystkie polecenia są formułowane w trybie tekstowym, a podstawowa struktura danych jest macierz.



**Simulink** jest częścią pakietu numerycznego MATLAB.

Służy do przeprowadzania symulacji komputerowych.

**Simulink pozwala budować modele symulacyjne przy pomocy interfejsu graficznego i tzw. bloków**

(bez znajomości języków programowania).

Zamiast pisać kod w Simulinku opisujemy procesy

w postaci połączonych bloków,

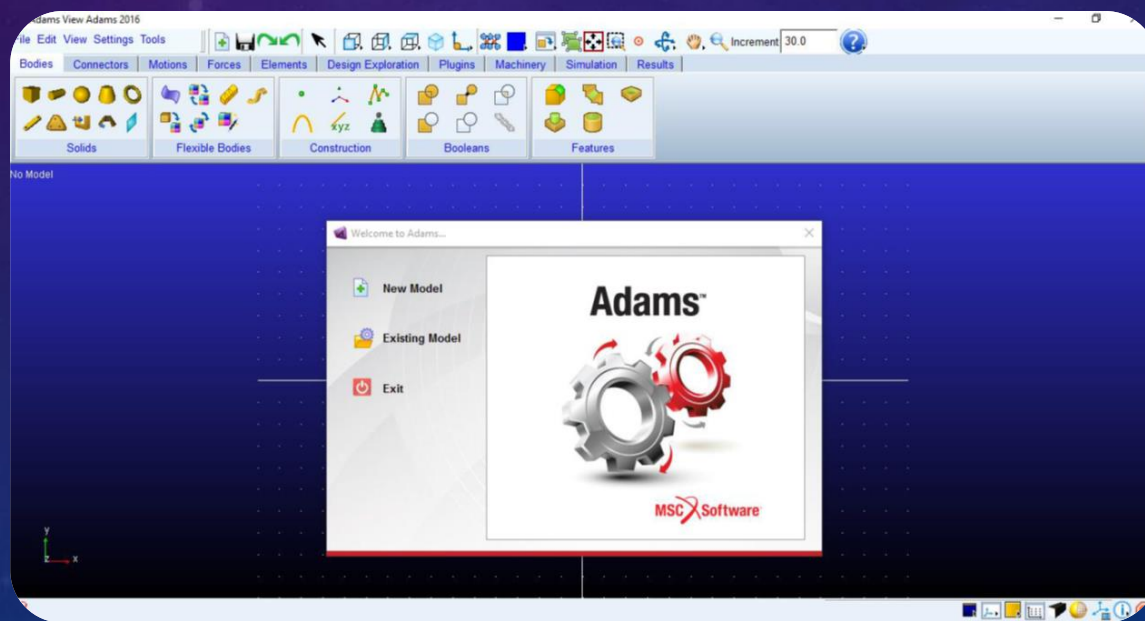
wykorzystując odpowiednie ikony (bloki).



# MSC ADAMS ([HTTPS://WWW.MSCSOFTWARE.COM/PRODUCT/ADAMS](https://www.mscsoftware.com/product/adams))

## Adams Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems

Program **MSC Adams** służy do symulacji ruchu układów wieloczłonowych, tzw. **MultiBody Dynamics**. Pracując w tym środowisku **wykonujemy model fizyczny badanego układu**. Jego rozwój rozpoczął się w 1974 r. Na University of Michigan. Oprogramowanie jest używane przez wiele dużych gałęzi przemysłu. Wykorzystuje metodę Lagrange'a do tworzenia równań ruchu. Oprogramowanie posiada potężne możliwości a jego zintegrowana animacja pomaga w dokładnej analizie dynamiki systemu mechanicznego.





# MSC ADAMS (ADAMS/VIEW)

**Main Toolbox**

View Control

Increment 30.0

Grid Depth

Render Icons

**1 Rigid Body**

**2 Measure**

**3 Undo/Redo**

**4 Joint**

**5 Object Color**

**6 Motion**

**7 Move**

**8 Create Forces**

**9 Dynamic Rotation**

**10 Dynamic Translation**

**11 View Front/Back**

**12 View Right/Left**

**13 View Top/Bottom**

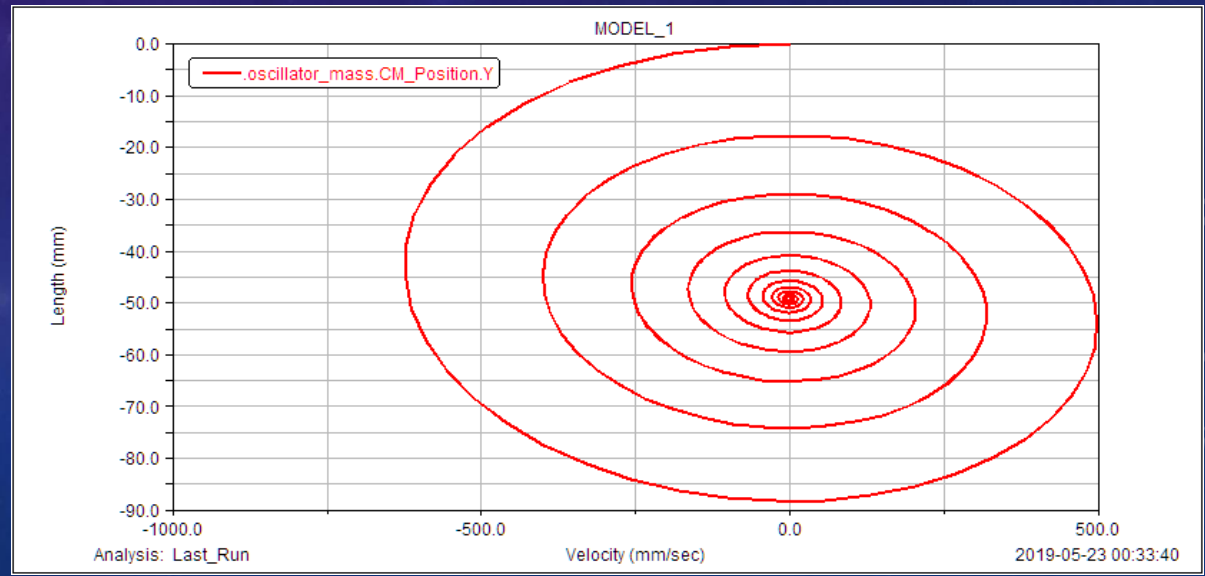
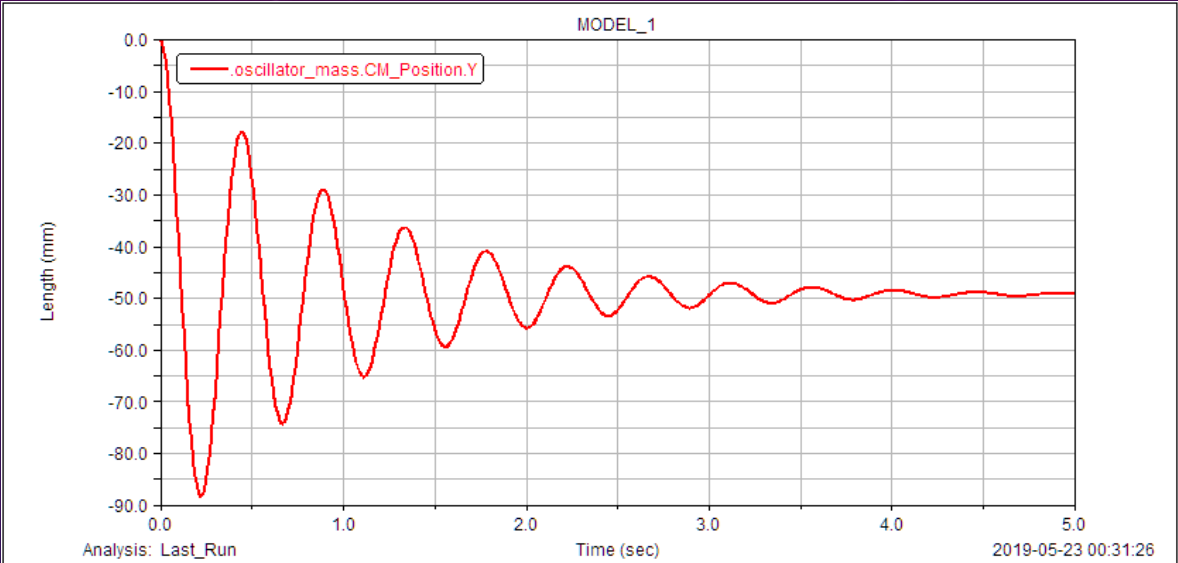
**14 Background Color**

**15 Toggle**

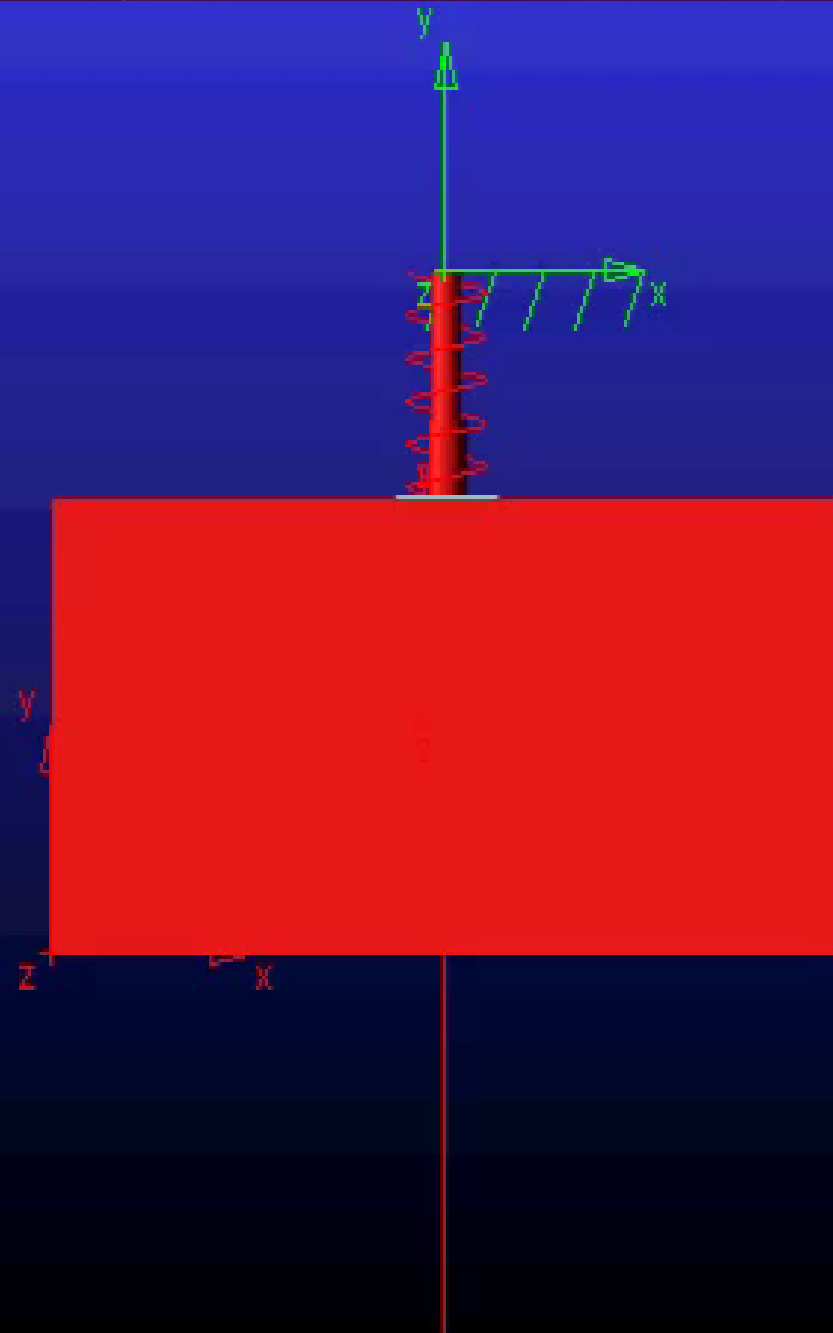




# PRZYKŁAD W ADAMSIE



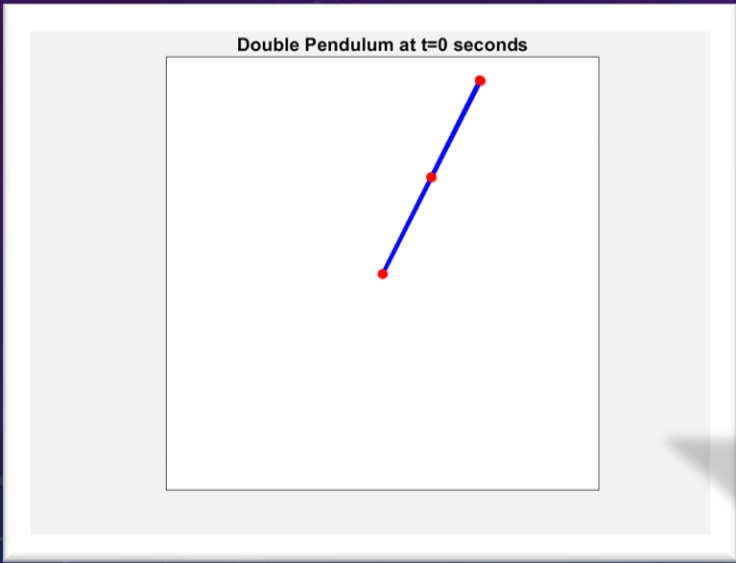
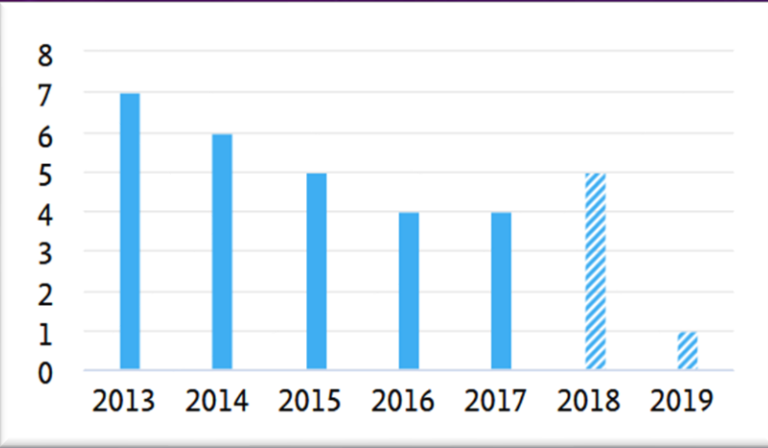
Last\_Run Time= 0.0000 Frame=001





# JAK PRZEDSTAWIĆ WYNIKI BADAŃ

l-cze	drużyna	mecze	punkty	wygrane	remisy	porażki	bramki	bilans
1	ULTRAS KĘTY	10	30	10	0	0	109-33	+76
2	KCP TEAM	10	27	9	0	1	69-21	+54
3	ORZEL	10	24	8	0	2	52-36	+16
4	OLDBOJE	10	19	6	1	3	62-41	+21
5	CZARNA MAMBA	10	18	6	0	4	70-51	+19
6	STREED SQUAD	10	14	5	2	3	40-37	+3
7	FC SASIEDZI	10	12	4	0	6	34-65	-31
8	GLUTY Z KALKUTY	10	9	3	0	7	38-57	-19
9	D-FORMACJA	10	7	2	1	7	24-50	-26
10	LOS KOJOTOS	10	6	2	0	8	30-62	-32
11	BAJER	10	6	2	0	8	37-77	-40
12	WAZ ATYV STADIONIE	10	2	1	0	9	22-79	-60

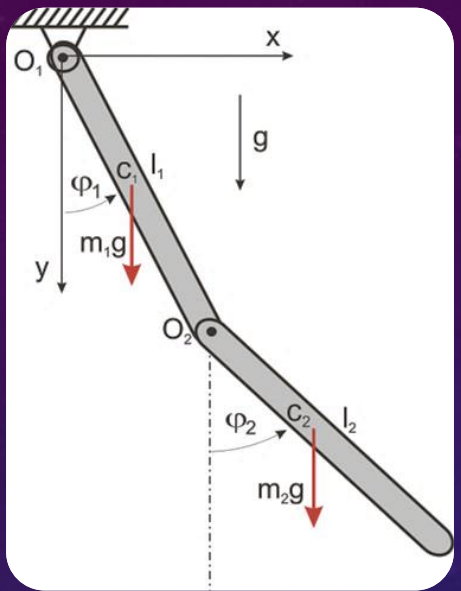


[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Demonstrating\\_Chaos\\_with\\_a\\_Double\\_Pendulum.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Demonstrating_Chaos_with_a_Double_Pendulum.gif)

- ❑ Tabele,
- ❑ Wykresy (wizualizacja),
- ❑ Filmy rzeczywiste z doświadczeń,
- ❑ Animacje,
- ❑ Raporty.



# ANIMACJA PODWÓJNEGO WAHADŁA



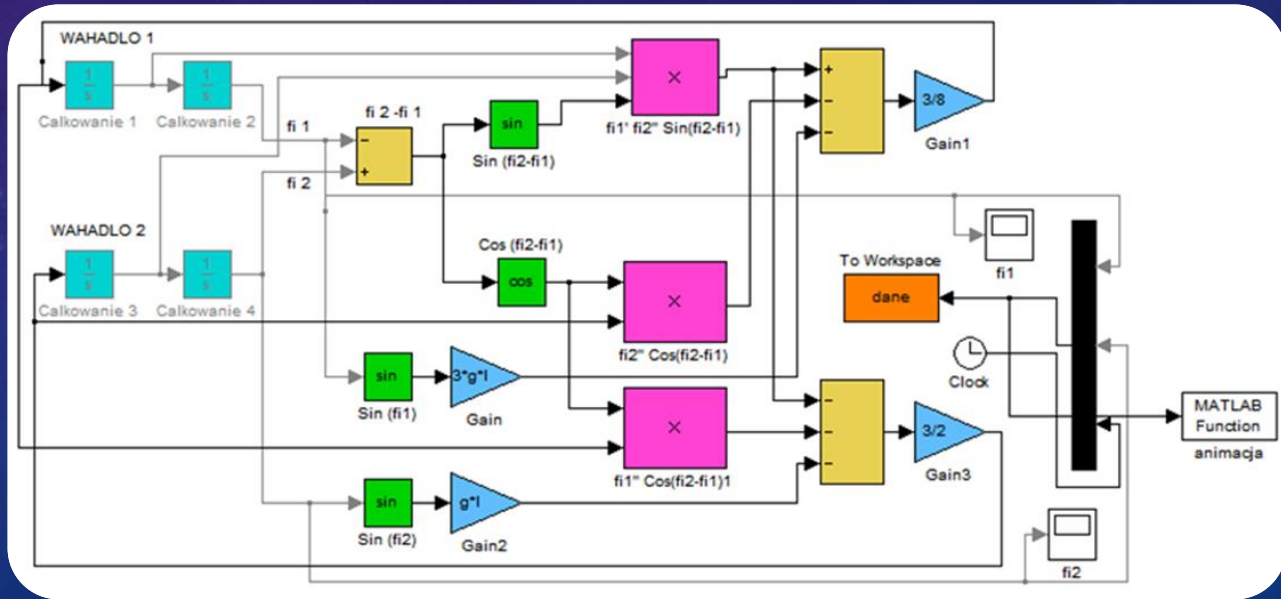
$$\frac{4}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{3g}{2l} \sin \varphi_1 = 0,$$

$$\frac{1}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1g}{2l} \sin \varphi_2 = 0.$$



$$\frac{4}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{3g}{2l} \sin \varphi_1 = 0,$$

$$\frac{1}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1g}{2l} \sin \varphi_2 = 0.$$





# ANIMACJA PODWÓJNEGO WAHADŁA

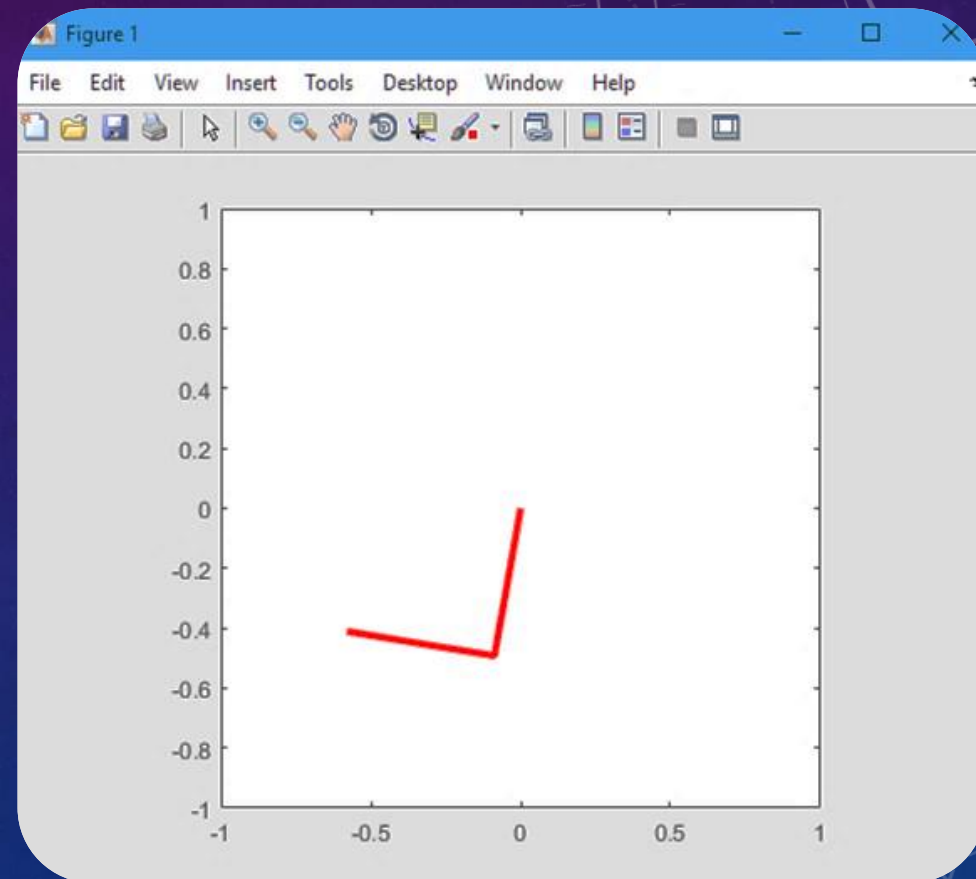
```
% two pendulums
```

```
x=[x1, x2];  
y=[y1, y2];  
h1=plot(x,y,'LineWidth',3, 'Color','r');  
axis([-1 1 -1 1]);  
axis on  
axis square  
grid off
```

```
% animation
```

```
n=length(t);  
for i=2:n;  
    drawnow  
    x1=l*[0 sin(dane(i,1))];  
    y1=l*[0 -cos(dane(i,1))];  
    x2=l*[sin(dane(i,1)) sin(dane(i,2))+sin(dane(i,1))];  
    y2=l*[-cos(dane(i,1)) -cos(dane(i,1))-cos(dane(i,2))];  
    y=[y1 y2];  
    x=[x1 x2];  
    set(h1,'xData',x,'yData',y);  
end
```

```
clear All  
%system parameters  
g=9.81; %m/s^2  
l=0.5; %m  
% initial conditions  
tk=50; %s  
fi1_o=3; %rad  
fi2_o=2; %rad  
%simulation  
sim('podwojnawahadlo',tk);  
fi1=dane(:,1); %  
fi2=dane(:,2); %  
t=dane(:,3); %  
%pendulum figure 1 (initial position)  
x1=[0 l*sin(fi1_o)];  
y1=[0 -l*cos(fi1_o)];  
%pendulum figure 2 (initial position)  
x2=[l*sin(fi1_o) l*sin(fi1_o)+l*sin(fi2_o)];  
y2=[-l*cos(fi1_o) -l*cos(fi1_o)-l*cos(fi2_o)];
```



# DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ !!!

## MECHANIKA I FIZYKA CIAŁA STAŁEGO

**POLITECHNIKA LUBELSKA**  
Katedra Mechaniki Stosowanej  
dr hab. inż. Krzysztof Kęcik, prof. nadzw.  
dr hab. inż. Sylwester Samborski, prof. nadzw.

---

Projekt „Politechnika Lubelska – Regionalna Inicjatywa Doskonałości”  
– finansowany ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego



Ministerstwo  
Nauki  
i Szkolnictwa  
Wyższego

